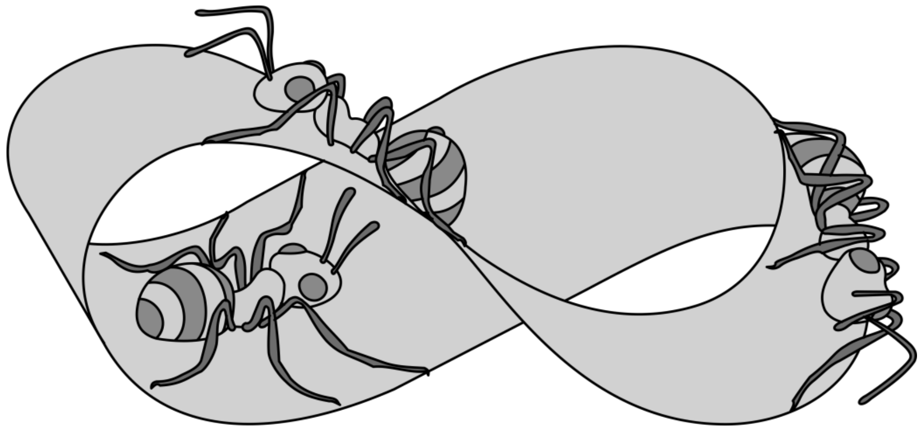
KNOPEN EN GROEPEN

ANTWOORDEN EN NORMERING



VOORKENNIS

ISOMORFIE

1 De groep $(\mathbb{Z}_8^*;+)$ is isomorf aan de kleingroep, K_4, dus $(\mathbb{Z}_8^*;+) \cong K_4$, maar andere antwoorden zijn mogelijk.

LINEAIRE BEZIERKROMMEN

2 $(1 - t)\vec{p} + t\vec{q} = \vec{p} + (\vec{q} - \vec{p})t$

Dit betekent dat de kromme begint op de kop van $\vec{p}$ en dan iedere vector tussen $\vec{q}$ en $\vec{p}$ tekent, sindsdat $t\in[0;1]$.

PRODUCTGROEPEN

3

	(0;0)	(0;1)	(0;2)	(1;0)	(1;1)	(1;2)
(0;0)	(0;0)	(0;1)	(0;2)	(1;0)	(1;1)	(1;2)
(0;1)	(0;1)	(0;2)	(0;0)	(1;1)	(1;2)	(1;0)
(0;2)	(0;2)	(0;0)	(0;1)	(1;2)	(1;0)	(1;1)
(1;0)	(1;0)	(1;1)	(1;2)	(0;0)	(0;1)	(0;2)
(1;1)	(1;1)	(1;2)	(1;0)	(0;1)	(0;2)	(0;0)
(1;2)	(1;2)	(1;0)	(1;1)	(0;2)	(0;0)	(0;1)

TOREN VAN HANOI

4 Dit zijn 7 stappen.

5 Dit zijn 15 stappen.

6 Dit zijn $2^N - 1$ stappen.

7 $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ seconden

$$\frac{2^{64} - 1}{3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25} \approx 5{,}84 \cdot 10^{11} \text{ jaar}$$

Dit is meer dan tien keer zo lang als dat het universum momenteel bestaat.

DE TRIVIALE GROEP

8 De triviale groep heeft één ondergroep, namelijk zichzelf. Iedere groep heeft namelijk zichzelf als ondergroep.

WOORDEN

9 $\overline{3}\overline{7}$, $\overline{5}\overline{3}^2\overline{7}^2$, $\overline{7}\overline{3}\overline{5}^{-1}\overline{3}\overline{7}$, $\overline{5}^3$, $\overline{1}\overline{5}$ en $\overline{5}$ zijn geldige antwoorden, maar er zijn meer antwoorden mogelijk.

1 TOPOLOGIE

HOMEOMORFIE EN INVARIANTIE

1.1 Onder homeomorfie zijn er vier letters: {A,D,O,P,Q,R}, {B}, {C,E,F,G,H,K,L,M,N,S,T,U,V,W,X,Y,Z} en {i,j}. Iedere correcte verzameling geeft 1 punt.

1.2 Onder homeomorfie zijn er zes objecten: {A,C,D,E,G}, {B}, {D}, {H,J,K}, {I} en {L}. Iedere correcte verzameling geeft 1 punt.

MANIFOLDS

1.3 Sferen zijn begrensd en gesloten (1p). Bollen zijn onbegrensd en gesloten (1p). Intervallen zijn begrensd en gesloten (1p). Tori zijn onbegrensd en gesloten (1p). Reele ruimtes zijn ongebrensd en open (1p).

ISOTOPIE

1.4 Geval a, b en c snijden elkaar niet. Geval d snijden in een punt. Geval e snijden in een lijn. Ieder correct geval geeft 1 punt. (Het type snijobject hoeft niet genoemd te worden.)

1.5 Onder isotopie zijn er drie cirkels: {A,B}, {C} en {D}. Iedere correcte verzameling geeft 1 punt.

1.6 Er bestaan manifolds die homeomorf zijn, maar niet isotoop (1p). De cirkels uit de vorige vraag zijn daar een goed voorbeeld van. (Een ander voorbeeld of andere verklaring is mogelijk.) (1p) Er bestaan geen manifolds die isotoop zijn, maar niet homeomorf (1p), sindsdat isotopie meer voorwaarden heeft voor het 'kleien' dan homeomorfie (1p).

2 KNOPENTHEORIE

HET KRUISGETAL EN PRIEMKNOPEN

2.1 De eerste knoop heeft vier kruisingen (1p). De tweede knoop heeft zes kruisingen (1p). De derde knoop is isotoop aan 3_1 (1p) en heeft dus drie kruisingen (1p). De triviale knoop heeft geen kruisingen en heeft dus kruisgetal 0 (1p).

2.2 Het gaat om de priemknoop 7_6. Het schetsen van een knoopdiagram met zeven kruisingen geeft 1 punt. Een poging tot het vinden van de juiste priemknoop geeft daarnaast nog 1 punt.

KNOOPSOMMEN

2.3 Het 'open breken' van de triviale knoop geeft een B^1 die precies het 'gat' van de priemknoop 'dicht'. Een knoopsom met een triviale knoop geeft dus dezelfde priemknoop terug. (1p)

DE REIDEMEISTERBEWEGINGEN

2.4 Een knoopdiagram met één kruising kan alleen van een triviale knoop met een twist zijn (2p). Een knoopdiagram met twee kruisingen kan alleen van een triviale knoop met twee twists of een overlapping zijn (3p).

SCHAKELS EN HET SCHAKELGETAL

2.5 Het schakelgetal van de hopfschakel is 1 (2p).

2.6 Het schakelgetal van de eerste schakel is 0 (4p). Het schakelgetal van de tweede schakel is 6 (2p). Het schakelgetal van de derde schakel is 8 (7p).

2.7 Het veranderen van de orientatie maakt een positieve kruising negatief en een negatieve kruising positief. Daarmee verandert hooguit het teken van de som van de waarden, maar omdat je uiteindelijk de absolute waarde neemt, maakt dit niet uit. (3p)

3 ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

PADEN, LUSSEN EN HOMOTOPIE

3.1 h(x;0) = f(x) en h(x;1) = g(x), daarnaast is h(x;p) continue voor $p \in [0;1]$. Dit maakt de homotopie altijd mogelijk. (2p)

3.2 De functie die $\vec{v}_0(t)$ overbrengt naar $\vec{v}_1(t)$ is (2p):

$$\vec{h}(t;p) = \begin{bmatrix} (1-p)((1-t)^2 + 2t(1-t) + 6t^2) + p((1-t)^2 + 10t(1-t) + 6t^2) \\ (1-p)(4(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2) + p(4(1-t)^2 + 6t(1-t) + t^2) \end{bmatrix}$$

Het juist invoeren in geogebra geeft daarnaast nog 1 punt.

3.3 De functie die $\vec{v}_0(t)$ overbrengt naar $\vec{v}_1(t)$ is (2p):

$$\vec{h}(t;p) = \begin{bmatrix} (1-p)\left(\frac{\sin(\pi t)}{\cos^2(\pi t)+1}\right) + p(-2\cos^2(\pi t + \frac{1}{2}\pi)) \\ (1-p)\left(\frac{\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{\cos^2(\pi t)+1}\right) + p(-2\cos(\pi t)\cos(\pi t + \frac{1}{2}\pi)) \end{bmatrix}$$

Het juist invoeren in geogebra geeft daarnaast nog 1 punt.

3.4 Twee groepen zijn isomorf (≅) aan elkaar als ze dezelfde structuur hebben. Er bestaat dan een bijectieve afbeelding tussen de groepen. (1p) Twee manifolds zijn homeomorf (=) aan elkaar als ze tot elkaar 'om te kleien' zijn. Er bestaat dan een continue en bijectieve afbeelding tussen de manifolds. (1p) Twee manifolds zijn isotoop (~) aan elkaar als de één via rotatie, verplaatsing en 'kleien' in de ander om te toveren is, maar tijdens deze vervorming mag de manifold zichzelf niet snijden. (1p) Twee manifolds zijn homotoop (≃) als er een continue afbeelding tussen de manifolds bestaat. (1p) Iedere toevoeging hierop geeft nog 1 punt.

PADCOMPOSITIE

3.5 De padcompositie is (2p):

$$\text{vw}\begin{cases}\begin{bmatrix}2(1-2t)+8t\\3(1-2t)+10t\end{bmatrix} & \text{als } 0 \le t \le \frac{1}{2}\\ \begin{bmatrix}4(2-2t)+12t-6\\5(2-2t)+4t-4\end{bmatrix} & \text{als } \frac{1}{2} \le t \le 1\end{cases}$$

Het juist invoeren in geogebra geeft daarnaast nog 1 punt.

3.6 Zowel fg als rs hebben het beginpunt f(0) = r(0) en het eindpunt g(1) = s(1), naast het punt f(1) = r(1) = g(0) = s(0), dus fg $\simeq$ rs (2p).

3.7 Een pad van f(0) tot g(1) met f(1) = g(0), dat gecombineerd wordt met een pad r met r(0) = g(1) is homotoop aan een pad van g(0) tot r(1) met g(1) = r(0), dat gecombineerd wordt met een pad f met f(1) = g(0). Dus padcompositie is associatief. (2p)

FUNDAMENTELE GROEPEN

3.8 Homotopie tussen paden is reflexief (1p), want ieder pad is homotoop aan zichzelf (1p). Homotopie tussen paden is symmetrisch (1p), want als pad f homotoop is aan pad g, is g homotoop aan f (1p). Homotopie tussen paden is transitief (1p), want als er een homotopie tussen het pad f en g bestaat en er bestaat een homotopie tussen pad g en r, dan bestaat er een homotopie tussen f en r (1p).

3.9 fk is niet gelijk aan f(x), omdat fk twee keer zo snel over de baan van f(x) beweegt, maar omdat k(x) geen baan toevoegt aan f(x) bij de padcompositie, is fk wel homotoop aan f(x). (2p)

3.10 De lus ff^{-1} beweegt over de baan van f(x) en vervolgens weer terug. Dit kan worden 'geslonken' tot k(x). (2p)

3.11 De verzameling lussen is niet leeg, want deze bevat altijd k(x) (1p). Padcompositie is een binaire bewerking (1p). De groep is gesloten, want padcompositie tussen lussen levert altijd een lus op. (1p) Padcompositie is associatief (1p). Er is een neutraal element, namelijk k(x) (1p). Iedere lus heeft een inverse (1p).

3.12 De unieke lussen zijn ..., f^{-3}, f^{-2}, f^{-1}, k, f, f^2, f^3, ... Padcompositie is daarmee vergelijkbaar met optelling en de macht van de lus is daarmee vergelijkbaar met een heel getal. (1p)

3.13 De lus f^2g gaat twee keer over de baan van f(x) heen en vervolgens één keer over de baan van g(x) heen (1p). De twee verzamelingen aan lussen, met alle f en met alle g, zijn beide vergelijkbaar met de hele getallen (1p). Iedere combinatie van lussen uit de twee verzamelingen is uniek, dus het gaat om het $\mathbb{Z}^2$ (2p).

3.14 $\Pi_1(S^2)$ en $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ zijn beide isomorf aan E, dus $\Pi_1(S^2) \cong E$ (2p) en $\Pi_1(\mathbb{R}^n) \cong E$ (2p).

DEFORMATIERETRACTIE

3.15 $\vec{h}(x;y;0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en laat $\mathbb{R}^2\backslash O$ dus intact (1p). $\vec{h}(x;y;1) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$ en stuurt alle punten in $\mathbb{R}^2\backslash O,\{(x;y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ naar de eenheidscirkel door de vectoren te normaliseren (1p). $\vec{h}(x;y;p) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ als $\sqrt{x^2+y^2} = 1$, dus de functie laat de eenheidscirkel voor iedere p intact (2p).

3.16 $\Pi_1(\mathbb{R}^3\backslash O) \cong \Pi_1(S^2) \cong E$ (2p) en $\mathbb{R}^2\backslash(1;1),(2;2))$ is via deformatieretractie te vervormen tot twee rakende cirkels, dus $\Pi_1(\mathbb{R}^2\backslash(1;1),(2;2)) \cong (\mathbb{Z}^2;+)$ (2p).

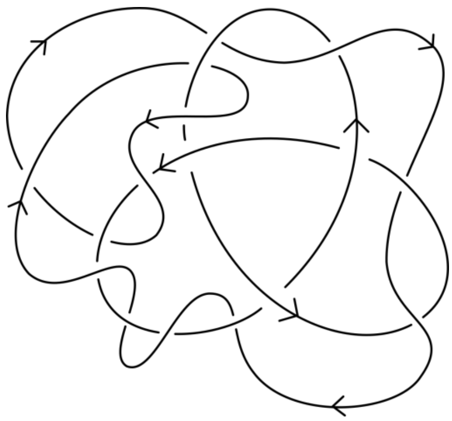
3.17 Als je over de bol met de lus erin lussen tekent, zijn alleen degene die over de lus in de bol lopen interessant. De rest is homotoop aan de constante lus. Dus $\Pi_1(\mathbb{R}^3\backslash S^1) \cong (\mathbb{Z};+)$. (1p)

4 KNOOPGROEPEN

KNOOPGROEPEN

4.1 f^2 (1p)

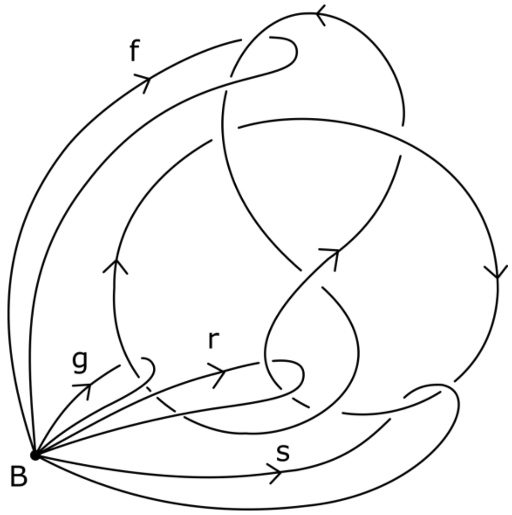
4.2 De volgende afbeelding geeft een juiste schets. Iedere twee juiste letters uit het woord geeft 1 punt. Het schakelgetal is 4 (1p). Het schakelgetal is gelijk aan de som van de exponenten van het woord (2p.)



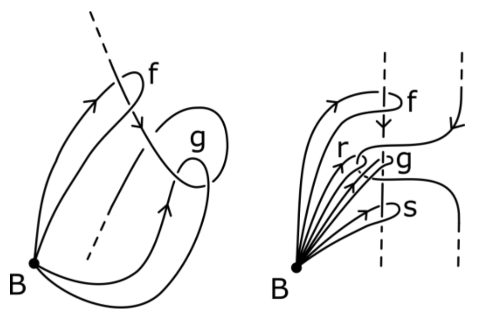
4.3 Het schetsen van een situatie als in de volgende afbeelding geeft 1 punt. Iedere juiste relatie geeft 1 punt, hier gf = fs, gr = rf, rg = gf en rg = gs. Het opstellen van de vrije groep geeft 1 punt, hier:

⟨f,g,r,s | gf = fs,gr = rf,rg = gf,rg = gs⟩

Het reduceren tot een groep met twee voortbrengers en één relatie geeft 2 punten. Deze groep is $\langle f,g \mid gf^{-1}gf = fg^{-1}fg \rangle$ (of iets equivalents).



4.4 Het schetsen van situaties als in de volgende twee afbeeldingen voor iedere orientatie geeft 1 punt. Iedere juiste relatie geeft 1 punt, hier respectievelijk fg = g^2 en fr = rg, sr = rg (gf = g^2 en fr = rg, sr =rg bij de andere orientaties). Concluderen dat f = g en f = s (of iets equivalents) en het feit dat de reidemeisterbewegingen dan opgaan, geeft 1 punt.



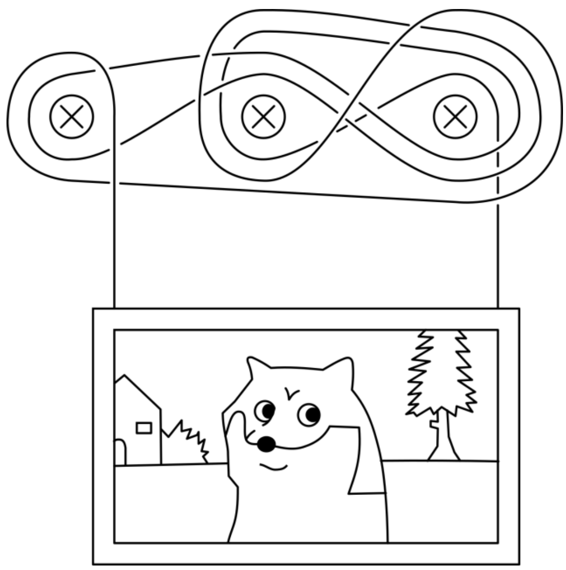
4.5 De knoopgroep is $\langle f,g \rangle$ (2p). Het woord $fgf^{-1}g^{-1}$ is niet te reduceren (1p), want de knoopgroep is niet abels (1p).

4.6 De schets levert de borromeaanse ringen op (2p). Eén van de cirkels of de lus verwijderen ontschakelt de ringen (2p).

4.7 De knoopgroep is $\langle f,g \mid fg = gf \rangle$, want de relaties voor de kruisingen zijn $fg = gf$ en $fg = gf$ (4p). Het woord $fgf^{-1}g^{-1}$ is nu te reduceren tot k(x) (1p), want de knoopgroep is abels (1p).

4.8 De spijkers zijn analoog aan de triviale schakel in vraag 4.5, het touw en het schilderij vormen samen een lus die door de cirkels gaat als het touw over de spijker gaat (3p). Het woord dat bij de lus hoort, is $fg^{-1}f^{-1}g$ (1p). Omdat de groep niet abels is, is dit woord niet gelijk aan k(x), dus het schilderij valt niet. Het verwijderen van alle g's geeft ff^{-1} = k(x). Het verwijderen van alle f's geeft gg^{-1} = k(x). Dus één van de spijkers verwijderen laat het schilderij wel vallen. (3p)

4.9 Het woord dat je wilt construeren is $fg^{-1}f^{-1}grg^{-1}fgf^{-1}r^{-1}$, sindsdat het verwijderen van één letter (alle f's, g's of r's) dan dezelfde kettingreactie als bij vraag 4.8 oplevert. (2p) De volgende afbeelding is de schets die daar bij hoort (2p).



4.10 Het woord voor vier spijkers is $fg^{-1}f^{-1}grg^{-1}fgf^{-1}r^{-1}srfg^{-1}f^{-1}gr^{-1}g^{-1}fgf^{-1}s^{-1}$. (Een tekening volstaat hier ook.) (2p) Het patroon is hetzelfde als de oplossing voor de toren van hanoi met N wielen, met de toevoeging van de laatste letter. (Een analoog patroon aan de toren van hanoi, zoals binair tellen, volstaat ook.) (3p)